ثانوية محمد الخامس – القنيطرة -
الأستاذ محمد غريز
http://arabmaths.ift.fr

تصحيح الامتحان الوطني الموحد للباكلوريا
الدورة - الاستدراكية - 2008

الثانية علوم رياضية أ و ب

التمرين الأول :

1 - ليكن r التطبيق الذي يربط كل نقطة M(z) بالنقطة $M_1(z_1)$ حيث : $z_1=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}z+\frac{\sqrt{3}+i}{2}$

لدينا : $\left|\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right|=1$ و $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\neq 1$

اذن r دوران مركزه Ω ذات اللحق $\omega=\frac{\frac{\sqrt{3}+i}{2}}{1-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}$ أي $\omega=\frac{\sqrt{3}+i}{1-i\sqrt{3}}$ أي $\omega=\frac{(\sqrt{3}+i)(1+i\sqrt{3})}{4}=i$

و زاويته $\theta\equiv\arg(\frac{1+\sqrt{3}i}{2})\ [2\pi]$

$\theta\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

ليكن h التطبيق الذي يربط النقطة M(z) بالنقطة $M_2(z_2)$ حيث $z_2=-2z+3i$

لدينا $-2\in\mathbb{R}^*-\{1\}$ اذن h تحاكي مركزه $\Omega(i)$ ونسبته -2

2 – أ - لتكن M'(z') هي صورة M(z) بالتطبيق F

لدينا F=hor

$M\xrightarrow{r}M_1\xrightarrow{h}M'$

$z\longrightarrow z_1\longrightarrow z'$

لدينا $z_1\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ و $z'=-2z_1+3i$ اذن $z'=-2((\frac{1+\sqrt{3}i}{2})z+\frac{\sqrt{3}+i}{2})+3i$

اذن $z'=-(1+i\sqrt{3})z-(\sqrt{3}+i)+3i$ أي $z'-i=-(1+i\sqrt{3})z-\sqrt{3}+i$

أي $z'-i=-(1+i\sqrt{3})z-i(-1-i\sqrt{3})$ أي $z'-i=-(1+i\sqrt{3})(z-i)$

و بما أن $-(1+i\sqrt{3})=2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

فإن $\boxed{z'-i=2e^{i\frac{4\pi}{3}}(z-i)}$

ب – لدينا $z'-i=2e^{i\frac{4\pi}{3}}(z-i)$

من أجل z=i لدينا z'=i

اذن Ω هي النقطة الوحيدة التي تحقق $F(\Omega)=\Omega$

3 – أ – لدينا B=F(A)

اذن $b-i=2e^{i\frac{4\pi}{3}}(a-i)$ أي $b=2e^{i\frac{4\pi}{3}}a-2ie^{i\frac{4\pi}{3}}+i$

و بما أن $-i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$ فان $\boxed{b=2e^{i\frac{4\pi}{3}}a+2e^{i\frac{5\pi}{6}}+i}$

لدينا C=F(B)

اذن $c-i=2e^{i\frac{4\pi}{3}}(2e^{i\frac{4\pi}{3}}a+2e^{i\frac{5\pi}{6}})$

اذن $\boxed{c=4e^{i\frac{2\pi}{3}}a+4e^{i\frac{\pi}{6}}+i}$

لدينا $D=F(C)$

اذن $d-i=2e^{i\frac{4\pi}{3}}(4e^{i\frac{2\pi}{3}}+4e^{i\frac{\pi}{6}})$

أي $d=8e^{i2\pi}a+8e^{i\frac{3\pi}{2}}+i$

أي $d=8a-8i+i$ و منه $\boxed{d=8a-7i}$

ب – لنبين أن النقط Ω و A و D مستقيمية.

لدينا $\frac{d-i}{a-i}=\frac{8a-7i-i}{a-i}=\frac{8(a-i)}{a-i}$

اذن $\frac{d-i}{a-i}=8$

بما أن $\frac{d-i}{a-i}$ عدد حقيقي فان النقط Ω و A و D مستقيمية.

ج – لنبين أن Ω مرجح النظمة المتزنة $\{(B,4);(C,2);(D,1)\}$

أي $4\overrightarrow{\Omega B}+2\overrightarrow{\Omega C}+\overrightarrow{\Omega D}=\vec{0}$

لدينا $4(b-i)+2(c-i)+d-i=8e^{i\frac{4\pi}{3}}a+8e^{i\frac{5\pi}{6}}+8e^{i\frac{2\pi}{3}}a+8e^{i\frac{\pi}{6}}+8a-8i$

$$=8a(1+e^{i\frac{2\pi}{3}}+e^{i\frac{4\pi}{3}})+8(e^{i\frac{5\pi}{6}}+e^{i\frac{\pi}{6}}-i)$$

$$=8a(1+e^{i\frac{2\pi}{3}}+e^{-i\frac{2\pi}{3}})+8(e^{i\frac{\pi}{2}}(e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}})-i)$$

$$=8a(1+2\cos\frac{2\pi}{3})+8(i.2\cos\frac{\pi}{3}-i)$$

$$=8a(1+2(-\frac{1}{2}))+8(2i\frac{1}{2}-i)=0$$

و بالتالي Ω هو مرجح النظمة المتزنة $\{(B,4);(C,2);(D,1)\}$

د - $D\in(O,\vec{u})\Leftrightarrow d=\overline{d}$

$$\Leftrightarrow 8a-7i=8\overline{a}+7i$$

$$\Leftrightarrow 8(a-\overline{a})-14i=0$$

$$\Leftrightarrow 16\,\mathrm{Im}\,a\,i-14i=0$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Im}\,a=\frac{7}{8}$$

إذن مجموعة النقط $A(a)$ هي المستقيم ذو المعادلة $y=\frac{7}{8}$

<u>التمرين الثاني :</u>

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \qquad x*y=x+y-3xy$$

1 – أ - لنبين أن $(1-3x)(1-3y)=1-3(x*y)$

أي $3(x*y)=1-(1-3x)(1-3y)$

لدينا $x*y=x+y-3xy$ اذن $3(x*y)=3x+3y-9xy$

أي $3(x*y)=1-(1-3x-3y+9xy)$

أي $1-3x-3y+9xy=1-3(x*y)$ ومنه $(1-3x)(1-3y)=1-3(x*y)$

ب - $x*y=x+y-3xy=y+x-3yx=y*x \qquad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$

اذن * تبادلي .

$$x*(y*z)=(x*y)*z \qquad \forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

اذن * تجميعي .

$$x*e=x\Leftrightarrow x+e-3xe=x \qquad (\forall x\in\mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow (\forall x\in\mathbb{R}) \quad e(1-3x)=0$$

$\Leftrightarrow e=0$ أو $1-3x=0$

$1-3x=0$ غير ممكن لكل x من $\mathbb{R}$ إذن 0 هو العنصر المحايد للقانون *.

x يقبل مماثلا في $(\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\},*)$ يعني يوجد x' في $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$ بحيث $x*x'=0$

$$x*x'=0 \Leftrightarrow x+x'-3xx'=0$$
$$\Leftrightarrow x'(1-3x)=-x$$
$$\Leftrightarrow x'=\frac{-x}{1-3x} \quad (\text{لان } x\neq\frac{1}{3})$$

و بالتالي $(\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\},*)$ زمرة تبادلية

2 – أ - $\varphi(x)=1-3x$

لدينا $\varphi(x*y)=1-3(x*y) \qquad \forall(x,y)\in(\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\})^2$

اذن $=(1-3x)(1-3y)$

أي $\varphi(x*y)=\varphi(x)\times\varphi(y)$

اذن φ تشاكل من $(\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\},*)$ نحو $(\mathbb{R}^*,\times)$

$$(\forall y\in\mathbb{R}^*) \qquad (\exists! x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\})\,/\,y=\varphi(x)\ ?$$

$$y=\varphi(x)\Leftrightarrow y=1-3x$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1-y}{3}$$

لنبين أن $x\neq\frac{1}{3}$

نفترض أن $x=\frac{1}{3}$

$\frac{1-y}{3}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow y=0$ (تناقض مع كون $y\neq 0$)

إذن φ تقابل من $(\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\},*)$ نحو $(\mathbb{R}^*,\times)$

ب - $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^*_+)=\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[\Leftrightarrow \varphi(\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[)=\mathbb{R}^{*+}$

(لان φ تناقصية) $\varphi(x)>\varphi(\frac{1}{3}) \qquad \forall x\in\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[$

$$\varphi(x)\geq 0$$

إذن $\varphi(\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[)\subset\mathbb{R}^{*+}$ (1)

ليكن y عنصرا من $\mathbb{R}^{*+}$

هل يوجد x من $\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[$ بحيث : $\varphi(x)=y$ ؟

$$y=\varphi(x)\Leftrightarrow y=1-3x$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1-y}{3}$$

لدينا $y>0$ ا ذن $-y<0$ اذن $1-y<1$

أي $\frac{1-y}{3}<\frac{1}{3}$ أي $x<\frac{1}{3}$

اذن $\mathbb{R}^{*+}\subset\varphi(\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[)$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن $\varphi(\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[) = \mathbb{R}^{*+}$ وبالتالي $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^{*+}) = \left]-\infty,\frac{1}{3}\right[$

ج – لدينا $\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[\subset \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$

و $\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[\neq \varnothing$ لان $0 \in \left]-\infty,\frac{1}{3}\right[$

ليكن x و y عنصران من $\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[$

لدينا $x * y' = x * (\frac{-y}{1-3y})$

اذن $= x - \frac{y}{1-3y} - 3x(\frac{-y}{1-3y})$

أي $= \frac{x - 3xy - y + 3xy}{1-3y}$

أي $x * y' = \frac{x-y}{1-3y}$

لدينا $\frac{1}{3} - \frac{x-y}{1-3y} = \frac{1-3y-3x+3y}{3(1-3y)} = \frac{1-3x}{3(1-3y)}$

و بما أن $x < \frac{1}{3}$ و $y < \frac{1}{3}$ فان $1-3x > 0$ و $1-3y > 0$

اذن $\frac{1-3x}{3(1-3y)} > 0$ أي $\frac{x-y}{1-3y} < \frac{1}{3}$ اذن $x * y' \in \left]-\infty,\frac{1}{3}\right[$

و بالتالي $(\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[, *)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}, *)$

3 – أ – من أجل n=0 لدينا $\varphi(x^{(0)}) = \varphi(0) = 1$ و $(\varphi(x))^0 = 1$

اذن $\varphi(x^{(0)}) = (\varphi(x))^0$

نفترض أن $\varphi(x^{(n)}) = (\varphi(x))^n$

و نبين أن $\varphi(x^{(n+1)}) = (\varphi(x))^{n+1}$

لدينا $\varphi(x^{(n+1)}) = \varphi(x^n * x)$

$= \varphi(x^n) \times \varphi(x)$ (لان φ تشاكل)

أي $= (\varphi(x))^n \times \varphi(x)$

و منه $\varphi(x^{(n+1)}) = (\varphi(x))^{n+1}$

ب - $\varphi(x^{(n)}) = (\varphi(x))^n \Leftrightarrow x^{(n)} = \varphi^{-1}((\varphi(x)^n)$

$\Leftrightarrow x^{(n)} = \varphi^{-1}((1-3x)^n)$

$\Leftrightarrow \boxed{x^{(n)} = \frac{1-(1-3x)^n}{3}}$

4 – ليكن T قانون التركيب الداخلي المعرف على $\mathbb{R}$ بما يلي : $xTy = x + y - \frac{1}{3}$ $\quad (\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)$

أ - $xTy = x + y - \frac{1}{3}$ $\quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$= y + x - \frac{1}{3}$

$xTy = yTx$

إذن T تبادلي.

لدينا $(xTy)Tz=(x+y-\frac{1}{3})Tz \quad \forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

اذن $=x+y+z-\frac{2}{3}$

لدينا $xT(yTz)=xT(y+z-\frac{1}{3})$

اذن $=x+y+z-\frac{2}{3}$

اذن $(xTy)Tz=xT(yTz)$ لكل (x,y,z) من $\mathbb{R}^3$

اذن T تجميعي .

لدينا $xT\frac{1}{3}=x+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=x \quad (\forall x\in\mathbb{R})$

اذن $\frac{1}{3}$ هو العنصر المحايد للقانون T

x يقبل مماثلا في $(\mathbb{R},T)$ يعني يوجد x' في E بحيث :

$xTx'=\frac{1}{3}$ (هذه العلاقة كافية لان T تبادلي)

$$xTx'=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x+x'-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x'=\frac{2}{3}-x}$$

اذن كل عنصر من $\mathbb{R}$ له مماثل في $(\mathbb{R},T)$. و بالتالي : $(\mathbb{R},T)$ زمرة تبادلية.

ب – لدينا $(\mathbb{R},T)$ زمرة تبادلية و $(\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\},*)$ زمرة تبادلية

لنبين أن * توزيعي بالنسبة للقانون T

أي $x*(yTz)=(x*y)T(x*z) \quad \forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ (هذه العلاقة كافية لان * تبادلي)

لدينا $x*(yTz)=x*(y+z-\frac{1}{3})$

اذن $=x+y+z-\frac{1}{3}-3x(y+z-\frac{1}{3})$

اذن $\boxed{x*(yTz)=2x+y+z-3xy-3xz-\frac{1}{3}} \quad (1)$

لدينا $(x*y)T(x*z)=(x+y-3xy)T(x+z-3xz)$

اذن $(x*y)T(x*z)=x+y-3xy+x+z-3xz-\frac{1}{3}$

$$\boxed{(x*y)T(x*z)=2x+y+z-3xy-3xz-\frac{1}{3}} \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن * توزيعي بالنسبة للقانون T .

و بالتالي : $(\mathbb{R},T,*)$ جسم تبادلي.

<u>التمرين الثالث :</u>

لدينا كرة بيضاء و ثلاث كرات حمراء

نسحب عشوائيا كرة من الصندوق نسجل لونها ثم نعيدها الى الصندوق

X = رتبة السحبة التي توقفت فيها التجربة

1 – (X=2) يعني سحب كرتين بيضاوتين أو كرتين حمراوين أي BB أو RR

اذن $p(X=2)=(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4})+(\frac{3}{4}\times\frac{3}{4})$

$$p(X=2)=\frac{1}{16}+\frac{9}{16}$$

اذن $$p(X=2)=\frac{5}{8}$$

(X=3) يعني سحب BRR أو RBB

إذن $$p(X=3)=(\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4})+(\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4})$$

$$p(X=3)=\frac{9}{64}+\frac{3}{64}$$

$$p(X=3)=\frac{3}{16}$$

2 – ليكن $k\in\mathbb{N}^*$

أ - $(X=2k)$ يعني سحب (BRBRB...............BRBB)

2k-2 2k-1 2k

أو (RBRB...............RBRR)

2k-2 2k-1 2k

إذن $$p_{2k}=(\frac{1}{4})^{k-1}.(\frac{3}{4})^{k-1}.(\frac{1}{4})^{2}+(\frac{3}{4})^{k-1}.(\frac{1}{4})^{k-1}.(\frac{3}{4})^{2}$$

أي $$=(\frac{1}{4})^{k+1}.(\frac{3}{4})^{k-1}+(\frac{3}{4})^{k+1}.(\frac{1}{4})^{k-1}$$

أي $$=(\frac{1}{4})^{k-1}.(\frac{3}{4})^{k-1}((\frac{1}{4})^{2}+(\frac{3}{4})^{2})$$

إذن $$=(\frac{3}{16})^{k-1}\times\frac{10}{16}$$

ومنه $$p_{2k}=\frac{5}{8}(\frac{3}{16})^{k-1}$$

ب – (X=2k+1) يعني سحب :

(BRBRB...............BRBRR)

2k-2 2k-1 2k 2k+1

أو (RBRB...............BRBB)

2k-2 2k-1 2k 2k+1

اذن $$p_{2k+1}=(\frac{1}{4})^{k}(\frac{3}{4})^{k-1}(\frac{3}{4})^{2}+(\frac{3}{4})^{k}(\frac{1}{4})^{k-1}(\frac{1}{4})^{k}$$

أي $$p_{2k+1}=(\frac{1}{4})^{k}(\frac{3}{4})^{k+1}+(\frac{3}{4})^{k}(\frac{1}{4})^{k+1}$$

$$=(\frac{1}{4})^{k}(\frac{3}{4})^{k}(\frac{3}{4}+\frac{1}{4})$$

$$=(\frac{1}{4})^{k}(\frac{3}{4})^{k}$$

$$\boxed{p_{2k+1}=(\frac{3}{16})^{k}}$$

التمرين الرابع :

لتكن f الدالة المعرفة على $I=\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ بما يلي : $\begin{cases} f(x)=\frac{\ln(1+2x)}{x}; x\neq 0 \\ f(0)=2 \end{cases}$

1 - $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}.2$
$=1\times 2=2=f(0)$

إذن f متصلة في $x_0=0$

2 - $a\in\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[\quad (a\neq 0)$

أ – لتكن $h_a(x)=(\ln(1+2a)-2a)x^2-(\ln(1+2x)-2x)a^2$

لدينا $h_a(0)=0$ و $h_a(a)=0$

h_a متصلة على المجال المغلوق الذي طرفاه 0 و a

و ق . ش على المجال المفتوح الذي طرفاه 0 و a

اذن حسب مبرهنة رول Rolle يوجد عدد حقيقي b محصور بين 0 و a بحيث : $h_a'(b)=0$

لدينا $h'_a(x)=2(\ln(1+2a)-2a)x-(\frac{2}{1+2x}-2)a^2$

$h'_a(b)=0 \Leftrightarrow (\ln(1+2a)-2a)b=(\frac{1}{1+2b}-1)a^2$

$\Leftrightarrow \frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2}=\frac{-2b}{b(1+2b)}$

$\Leftrightarrow \frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2}=\frac{-2}{1+2b}$

ب - $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)-2x}{x^2}$

حسب س - أ - $\frac{\ln(1+2x)-2x}{x^2}=\frac{-2}{1+2b}$ بحيث : b محصور بين 0 و x

اذا كان $(x>0)$ فان $0<b<x$

إذن $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+2x)-2x}{x^2}=\lim_{b\to 0^+}\frac{-2}{1+2b}=-2$

اذن f ق . ش على يمين 0 و $f'_d(0)=-2$

اذا كان $(x<0)$ فان $x<b<0$

اذن $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{b\to 0^-}\frac{-2}{1+2b}=-2$

اذن f ق . ش على يسار 0 و $f'_g(0)=-2$

و بالتالي f ق . ش في 0 و $\boxed{f'(0)=-2}$

3 – أ – الدالة f ق .ش على $I-\{0\}$ لأنها مركب و خارج دالتين ق ش على $I-\{0\}$

لدينا $f'(x)=\frac{\frac{2}{1+2x}x-\ln(1+2x)}{x^2} \qquad (\forall x\in I-\{0\})$

اذن $f'(x)=\frac{2x-(1+2x)\ln(1+2x)}{x^2(1+2x)}$

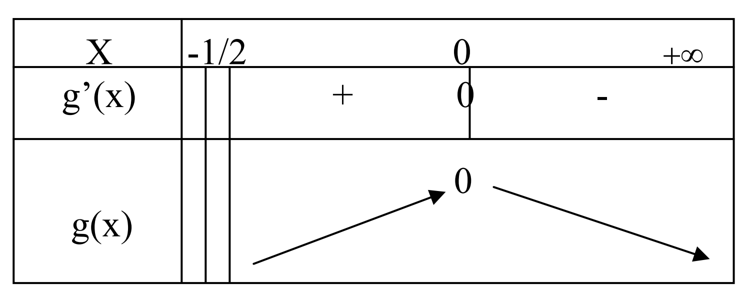
أي $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2(1+2x)}$

بحيث : $g(x)=2x-(1+2x)\ln(1+2x)$

ب – لدينا $g'(x) = 2 - 2\ln(1+2x) - \dfrac{(1+2x)2}{(1+2x)}$ $(\forall x \in I)$

إذن $g'(x) = -2\ln(1+2x)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1+2x = 1$$
$$\Leftrightarrow x = 0$$
$$x > 0 \Leftrightarrow 1+2x > 1$$
$$\Leftrightarrow \ln(1+2x) > 0$$
$$\Leftrightarrow -\ln(1+2x) < 0$$
$$\Leftrightarrow g'(x) < 0$$



من خلال جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن : g تقبل قيمة قصوى عند 0 و هي g(0)=0

اذن $g(x) < 0$ $(\forall x \in I - \{0\})$

ج - لكل x من I : $1+2x > 0$

اذن اشارة f'(x) هي اشارة g(x)

و بما أن g(x)<0 لكل x من $I - \{0\}$

فان f'(x)<0 اذن f تناقصية قطعا على I

4 - أ - $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{1}{2} \\ x > -\frac{1}{2}}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -\frac{1}{2} \\ x > -\frac{1}{2}}} \dfrac{\ln(1+2x)}{x}$

$$= \frac{-\infty}{-\frac{1}{2}} = +\infty$$

اذن المستقيم ذو المعادلة $x = -\dfrac{1}{2}$ مقارب للمنحنى (C)

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+2x)}{x}$

اذن $= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+2x)}{(1+2x)} \times \dfrac{(1+2x)}{x}$

$$= 0 \times 2 = 0$$

اذن المستقيم ذو المعادلة y=0 مقارب للمنحنى (C) بجوار (+∞)

ب – لتكن $h(x) = f(x) - 1$

h متصلة على $[1,2]$

$$h'(x) = f'(x) < 0 \quad (\forall x \in [1,2])$$

اذن h تناقصية قطعا على $[1,2]$

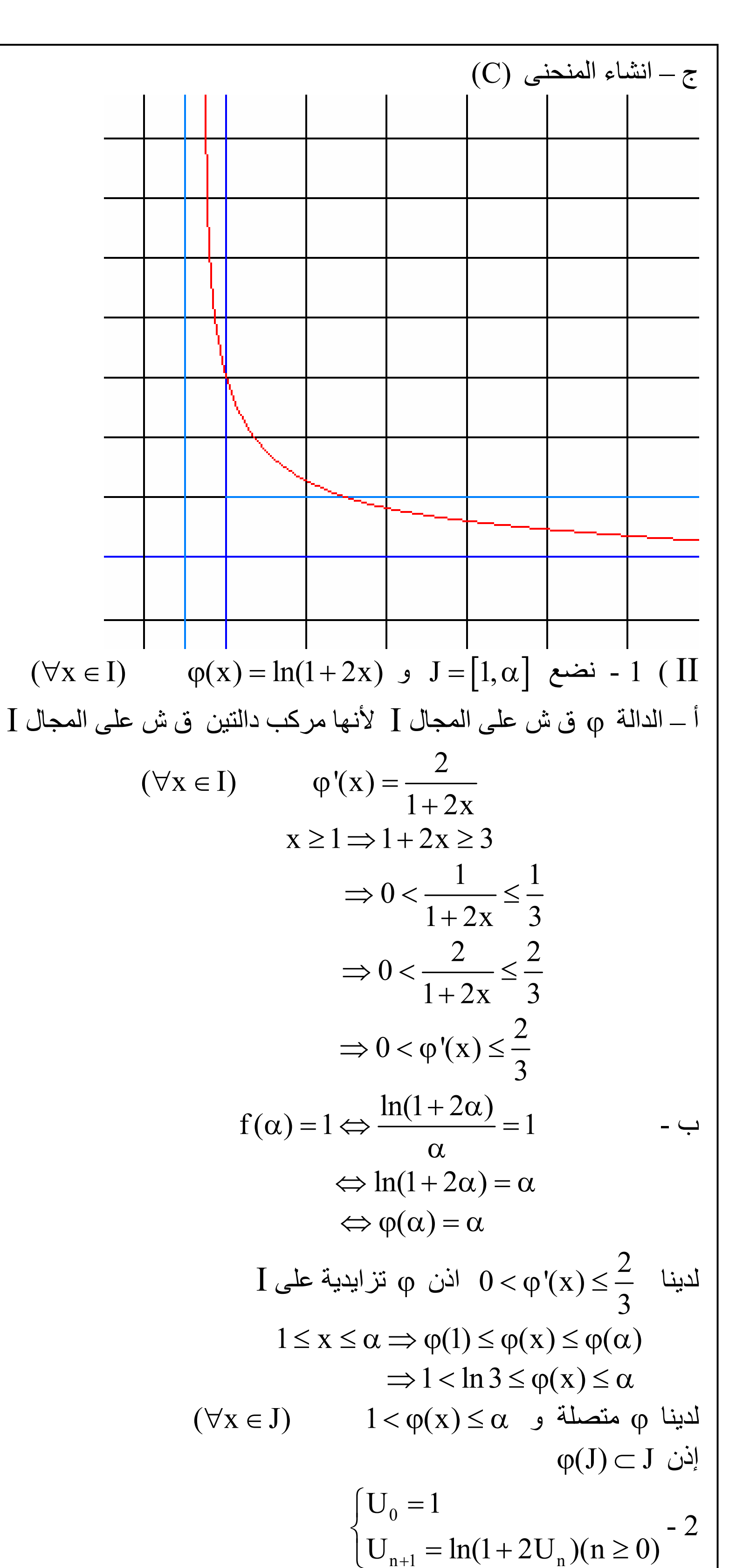
لدينا $h(1) = f(1) - 1$ و $h(2) = \dfrac{\ln 5}{2} - 1 < 0$

$$= \ln 3 - 1 > 0$$

اذن $h(1) \times h(2) < 0$

اذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد عدد حقيقي وحيد α من $[1,2]$ بحيث : $h(\alpha) = 0$ أي $f(\alpha) = 1$

ج – انشاء المنحنى (C)



II) 1 - نضع $J=[1,\alpha]$ و $\varphi(x)=\ln(1+2x)$ $(\forall x\in I)$

أ – الدالة φ ق ش على المجال I لأنها مركب دالتين ق ش على المجال I

$$(\forall x\in I)\qquad \varphi'(x)=\frac{2}{1+2x}$$

$$x\geq 1\Rightarrow 1+2x\geq 3$$
$$\Rightarrow 0<\frac{1}{1+2x}\leq\frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow 0<\frac{2}{1+2x}\leq\frac{2}{3}$$
$$\Rightarrow 0<\varphi'(x)\leq\frac{2}{3}$$

ب -
$$f(\alpha)=1\Leftrightarrow\frac{\ln(1+2\alpha)}{\alpha}=1$$
$$\Leftrightarrow\ln(1+2\alpha)=\alpha$$
$$\Leftrightarrow\varphi(\alpha)=\alpha$$

لدينا $0<\varphi'(x)\leq\frac{2}{3}$ اذن φ تزايدية على I

$$1\leq x\leq\alpha\Rightarrow\varphi(1)\leq\varphi(x)\leq\varphi(\alpha)$$
$$\Rightarrow 1<\ln 3\leq\varphi(x)\leq\alpha$$

لدينا φ متصلة و $1<\varphi(x)\leq\alpha$ $(\forall x\in J)$

إذن $\varphi(J)\subset J$

2 -
$$\begin{cases}U_0=1\\ U_{n+1}=\ln(1+2U_n)(n\geq 0)\end{cases}$$

أ - لدينا $U_{n+1}=\varphi(U_n)$

لنبين أن $U_n\in J$ أي $1\leq U_n\leq\alpha$ لكل $n\geq 0$

من أجل $n=0$ لدينا $U_0=1$ اذن $U_0\in J$

نفترض أن $U_n\in J$ لكل $n\geq 0$ و نبين أن $U_{n+1}\in J$

لدينا $U_n\in J$ وحسب س 1- ب - $\varphi(J)\subset J$

اذن $\varphi(U_n)\in J$ أي $U_{n+1}\in J$

و بالتالي $U_n\in J$ لكل $n\geq 0$

ب – لدينا $1 \le \alpha \le 2$

اذن $-2 \le -\alpha \le -1$ أي $-1 \le 1-\alpha \le 0 < 1$

اذن $|U_0 - \alpha| \le (\frac{2}{3})^0$

نفترض أن $|U_n - \alpha| \le (\frac{2}{3})^n$ لكل $n \ge 0$

و نبين أن $|U_{n+1} - \alpha| \le (\frac{2}{3})^{n+1}$

لدينا φ متصلة على المجال المغلوق الذي طرفاه α و U_n و ق ش على المجال المفتوح الذي طرفاه α و U_n

اذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية يوجد c محصور بين α و U_n بحيث :

$$|\varphi(U_n) - \varphi(\alpha)| = |\varphi'(c)||U_n - \alpha|$$

و بما أن $0 < \varphi'(x) \le \frac{2}{3}$ لكل $(x \ge 1)$ فان $|\varphi'(c)| \le \frac{2}{3}$

و لدينا $U_{n+1} = \varphi(U_n)$

و حسب س 1 – ب - $\varphi(\alpha) = \alpha$

اذن $|U_{n+1} - \alpha| \le \frac{2}{3}|U_n - \alpha|$

حسب افتراض الترجع لدينا $|U_n - \alpha| \le (\frac{2}{3})^n$

اذن $|U_{n+1} - \alpha| \le (\frac{2}{3})^{n+1}$

و بالتالي $|U_n - \alpha| \le (\frac{2}{3})^n$ لكل $(n \ge 0)$

ج – المتتالية $(\frac{2}{3})^n$ متقاربة و نهايتها 0 (لان $-1 < \frac{2}{3} < 1$)

اذن حسب مصاديق التقارب المتتالية (U_n) متقاربة و $\lim_{n\to+\infty} U_n = \alpha$

III) لتكن F الدالة المعرفة على I بما يلي : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

1 - أ – f متصلة على I اذن تقبل دالة أصلية ψ على I

بحيث ψ ق ش على I و $\psi'(x) = f(x) \quad (\forall x \in I)$

لدينا $F(x) = [\psi(t)]_0^x$

$= \psi(x) - \psi(0)$

اذن F ق ش على I لانها مجموع دالتين ق ش على I

$F'(x) = \psi'(x) \quad (\forall x \in I)$

$F'(x) = f(x)$

ب – من خلال مبيان الدالة f نستنتج أن $f(x)>0 \quad (\forall x \in I)$

اذن $F'(x)>0$ اذن F تزايدية قطعا على I

2 – أ – لدينا $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

اذن $F(x) = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt$

$$x \ge 1 \Rightarrow F(x) \ge \int_1^x f(t)dt$$

$$\Rightarrow F(x) \geq \int_1^x \frac{\ln(1+2t)}{t}\,dt$$

$$t \leq 1+2t \Rightarrow \frac{1}{t} \geq \frac{1}{1+2t} \Rightarrow \frac{\ln(1+2t)}{t} \geq \frac{\ln(1+2t)}{1+2t}$$

$$\Rightarrow \int_1^x \frac{\ln(1+2t)}{t}dt \geq \int_1^x \frac{\ln(1+2t)}{1+2t}dt$$

و بما أن $F(x) \geq \int_1^x \frac{\ln(1+2t)}{t}\,dt$

فان $F(x) \geq \int_1^x \frac{\ln(1+2t)}{1+2t}\,dt$

ب – لدينا $\int_1^x \frac{\ln(1+2t)}{1+2t}\,dt = \int_1^x \ln(1+2t)\frac{1}{2}\ln'(1+2t)dt$

اذن $\int_1^x \frac{\ln(1+2t)}{1+2t}\,dt = \left[\frac{1}{4}(\ln(1+2t))^2\right]_1^x$

أي $= \frac{1}{4}(\ln(1+2x))^2 - \frac{1}{4}(\ln 3)^2$

اذن $F(x) \geq \frac{1}{4}(\ln(1+2x))^2 - \frac{1}{4}(\ln 3)^2$

و بما أن $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4}(\ln(1+2x))^2 - \frac{1}{4}(\ln 3)^2 = +\infty$

فان $\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty}$

3 – نفترض أن الدالة F تقبل نهاية منتهية ℓ على اليمين في $-\frac{1}{2}$

اذن F تقبل تمديدا بالاتصال على اليمين في $-\frac{1}{2}$

أ – لتكن $\tilde{F}$ الدالة المعرفة على $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$ بما يلي :

$$\begin{cases} \tilde{F}(x) = F(x); x \in I \\ \tilde{F}(-\frac{1}{2}) = \ell \end{cases}$$

$\tilde{F}$ هي التمديد بالاتصال للدالة F على اليمين في $-\frac{1}{2}$

لدينا : $\tilde{F}$ متصلة على $\left[-\frac{1}{2}, x\right]$

و ق ش على $\left]-\frac{1}{2}, x\right[$

اذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية T.A.F

$$\exists c \in \left]-\frac{1}{2}, x\right[: \frac{\tilde{F}(x) - \tilde{F}(-\frac{1}{2})}{x+\frac{1}{2}} = \tilde{F}'(c)$$

اذن $F(x)-\ell=F'(c)(x+\frac{1}{2})$

$$F(x)-\ell=f(c)(x+\frac{1}{2})$$

لدينا : $-\frac{1}{2}<c<x$

و بما أن f تناقصية على I فان $f(c)\geq f(x)$

اذن $\boxed{F(x)-\ell\geq f(x)(x+\frac{1}{2})}$

ب - $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{2}\\ x>-\frac{1}{2}}}\dfrac{\tilde{F}(x)-\tilde{F}(-\frac{1}{2})}{x+\frac{1}{2}}=\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{2}\\ x>-\frac{1}{2}}}\dfrac{F(x)-\ell}{x+\frac{1}{2}}$

$$\geq\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{2}\\ x>-\frac{1}{2}}}f(x)$$

و بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{2}\\ x>-\frac{1}{2}}}f(x)=+\infty$

فان $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{2}\\ x>-\frac{1}{2}}}\dfrac{\tilde{F}(x)-\tilde{F}(-\frac{1}{2})}{x+\frac{1}{2}}\geq+\infty$

اذن : الدالة $\tilde{F}$ غير ق ش على اليمين في $-\frac{1}{2}$.

بعثه : ياسر غريز